

I. Stabilität im Sinne von Lyapunov

Krt1314

1. Definition und ein erster Satz

Wir betrachten im Folgenden Differentialgleichungen der Form $\dot{x} = f(x)$.

Dabei ist $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein einmal stetiges differenzierbares Vektorfeld (kurz $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$) (impliziert Existenz & Eindeutigkeit)

Ein Punkt ~~die~~ $x^* \in U$ heißt Ruhelage von $f(x)$ wenn $f(x^*) = 0$ gilt.

Ohne Einschränkung können wir annehmen $x^* = 0$.

HA: Warum gilt ohne Einschränkung $x^* = 0$?

Definition 1:

Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage von $\dot{x} = f(x)$ und bezeichne $t \mapsto x(t, x_0)$ die Lösung von $\dot{x} = f(x)$ mit Anfangswert $x_0: x^* = 0$ heißt stabil (im Sinne von Lyapunov), wenn für jeder $\varepsilon > 0$ ein

$\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass gilt
 $\|x_0\|_2 < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \forall t \geq 0: \|x(t, x_0)\|_2 < \varepsilon$

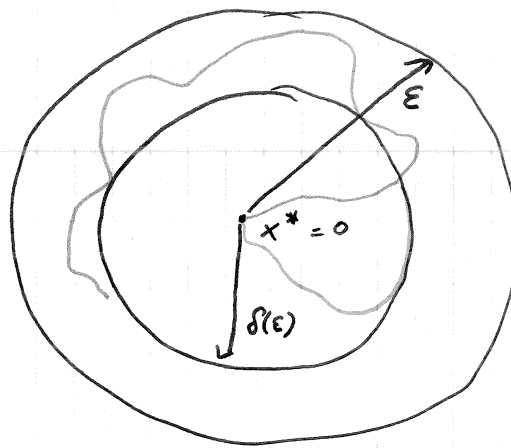
Die Ruhelage $x^* = 0$ heißt attraktiv, wenn es ein $\eta > 0$, so dass gilt:

$$\|x_0\|_2 < \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = x^* = 0$$

Ist die Ruhelage stabil und attraktiv, dann heißt die Ruhelage ~~$x^* = 0$~~ asymptotisch stabil.

Die Ruhelage $x^* = 0$ heißt exponentiell stabil, wenn es konstanten $k, \alpha > 0$ gibt, dass für alle $\|x_0\|_2 < c$ gilt:

$$\|x(t, x_0)\| \leq k \|x_0\|_2 e^{-\alpha t}$$



Lösung bleibt für
alle Zeit in der
 ϵ -Kugel $\rightarrow$ stabil

asy. stabil

HA Lsg.:

$$\odot \in x^* = 0$$

$$\dot{x} = f(x) \text{ mit RL } x^* \neq 0 \text{ also } f(x^*) = 0.$$

$$y = x - x^*, \text{ dann gilt } \dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + x^*)$$

Def.:

$$\bar{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^n, y \mapsto \bar{f}(y) = f(y + x^*)$$

$$\Rightarrow y = \bar{f}(y)$$

$$\text{hat RL in } 0, \text{ denn } \bar{f}(0) = f(0 + x^*) = f(x^*) = 0$$

Stabilität:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 : (|x_0| < \delta(\epsilon) \Rightarrow (\forall t \geq 0 : |x(t; x_0)| < \epsilon))$$

$(\Rightarrow)$

$$(**) \forall \epsilon > 0 : \exists \delta(\epsilon) > 0 : (|x_0| < \delta(\epsilon) \Rightarrow (\forall t \geq 0 : |x(t; x_0)| < \epsilon))$$

Instabil heißt nicht stabil, also betrachte Negation von (**):

$$\exists \epsilon > 0 : \forall \delta(\epsilon) > 0 : (|x_0| < \delta(\epsilon) \wedge (\exists t \geq 0 : |x(t; x_0)| \geq \epsilon))$$

Beispiel 2 (harmonischer Oszillator)

Die Dgl ~~ist~~ linear des harmonischen Oszillator ist gegeben durch:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

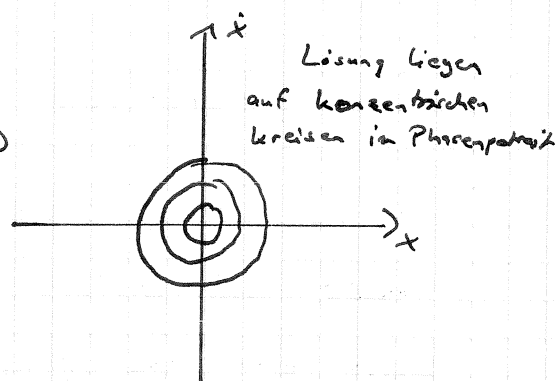
Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$x(t; (x_0, \dot{x}_0), \omega_0) = a_1((x_0, \dot{x}_0), \omega_0) \cos(\omega_0 t) + a_2((x_0, \dot{x}_0), \omega_0) \sin(\omega_0 t)$$

Mit $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, ergibt sich unmittelbar

$$a_1((x_0, \dot{x}_0), \omega_0) = x_0$$

$$\text{und } a_2((x_0, \dot{x}_0), \omega_0) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}.$$



(Wie sieht man das noch?):

$$\text{Die Fkt } (x, \dot{x}) \mapsto \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \dot{x}^2$$

ist ein erstes Integral von $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

"Somit" ist die RL:0 stabil, aber nicht asy. stabil.

Sei nun $\dot{x} = f(x)$ eine DGL mit RL $x^* = 0$ und einer stabilen Linearisierung. Zuerst schreiben wir die DGL um:

$$\text{Mit } A = Df(x^*) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{x=x^*} \right)_{i,j} \text{ und } g(x) = f(x) - A(x - x^*) \text{ und}$$

$$y = x - x^* \text{ gilt:}$$

$$\dot{y} = Ay + g(y)$$

Weil f stetig diffbar ist, gilt wegen des Satzes von Taylor und wegen des Mittelwertsatzes, dass für jedes $a > 0$ gibt es ein $k(a) > 0$, so dass $|y| \leq a \Rightarrow |g(y)| \leq k(a)|y|^2$.

Weil der Realteil der EW der ~~Linearisierten~~ Linearisierung kleiner als Null, gibt es ein $\lambda > 0$, so dass für alle EW σ gilt:

$$\operatorname{Re}(\sigma) < -\lambda < 0$$

Des Weiteren gilt für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $C > 1$ mit

$$|e^{At} v| \leq C |v| e^{-\lambda t}$$

Sei nun $\delta > 0$ fest, so dass $\delta < a$ und $C |v| k \delta - \lambda < 0$ gilt. Definiere $\alpha = \lambda - C k |v| \delta$, d.h. $\alpha > 0$ und $b = \frac{\delta}{C}$, d.h. $b > 0$ und $b < \delta < a$.

$$\dot{y} = Ay + g(y), |y| \leq a \Rightarrow |g(y)| \leq k(a) |y|^2 \quad (1)$$

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \exists C \geq 1: |e^{At} v| \leq C |v| e^{-\lambda t} \quad (2)$$

Löse $\dot{y} = Ay + g(y)$ mit AB y_0 , s.d. $|y_0| < b$.

$\Rightarrow$ Es gibt $J = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t < \tau\}$ mit Lösung $t \mapsto y(t; y_0)$ existiert und erfüllt $|y(t; y_0)| < \delta$ für alle $t \in J$.

Wegen $\delta < a$ und (1).

$$|g(y(t; y_0))| \leq k(a) |y(t; y_0)|^2 \leq k(a) \delta |y(t; y_0)| \text{ für } (3)$$

$t \in J$. Mit Variation der Konstanten erhält man für $y(t; y_0)$

$$y(t; y_0) = e^{At} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} g(y(s; y_0)) ds$$

Aus (2) und (3) folgt

$$|y(t; y_0)| \leq \underbrace{|e^{At} y_0|}_{\text{mit (2)}} + \underbrace{\int_0^t |e^{(t-s)A} g(y(s; y_0))| ds}_{\text{mit (3)}}$$

$$|y(t; y_0)| \leq C e^{-\lambda t} |y_0| + C k(a) \delta \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} |y(s; y_0)| ds$$

$$\underbrace{e^{\lambda t} |y(t; y_0)|}_{\xi} \leq C |y_0| + C k(a) \delta \int_0^t \underbrace{e^{\lambda s} |y(s; y_0)|}_{\xi} ds \quad (4)$$

$$\xi \leq C |y_0| + C k(a) \delta \int_0^t \xi ds$$

mit $\xi = e^{\lambda t} |y(t; y_0)|$

Konzepte der Regelungstechnik

Vorlesung — Vinograds Beispiel

Gerd Simon Schmidt

Institute for Systems Theory and Automatic Control
University of Stuttgart

25. Oktober 2013

Beispiel nach Vinograd (1957)

Sei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Betrachte

$$\dot{x} = \frac{x^2(y-x) + y^5}{r^2(1+r^4)}$$

$$\dot{y} = \frac{y^2(y-2x)}{r^2(1+r^4)}.$$

$x^* = 0$ ist die einzige Ruhelage.

Man kann zeigen (Meiss, Differential Dynamical Systems, p.120):

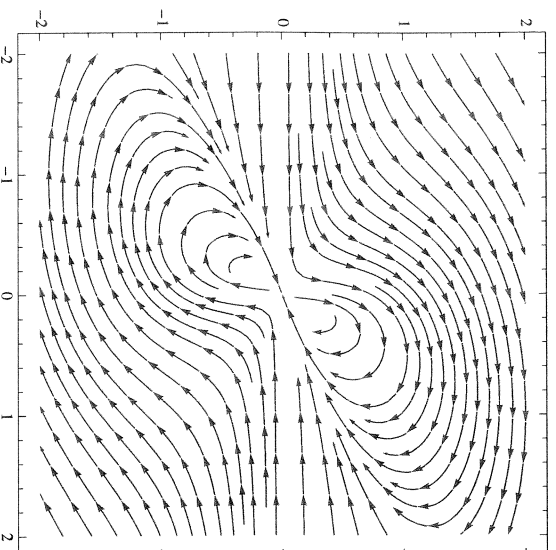
- Jede Lösung konvergiert in den Ursprung.

- Für $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ gilt: für jedes $\delta > 0$ gibt es

$x_0 \in B_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < \delta\}$ so dass $t \mapsto x(t, x_0)$ die Menge $B_{\frac{1}{2}}(0)$ verlässt.

Details, siehe Hahn, Stability of Motion, §40, p.191ff.

Beispiel nach Vinograd (1957)



Wdh.: $\dot{x} = f(x)$

$x^* = 0$ RL von $\dot{x} = f(x)$

Betrachte Linearisierung an $x^* = 0$

Man betrachtet $\dot{y} = Ay$ mit

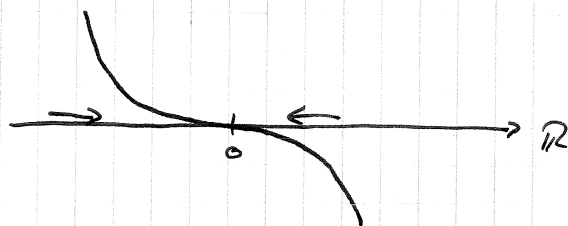
$$A = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Big|_{x=x^*=0} \right)_{ij}$$

Bemerkung 5:

Sei $x^* = 0$ eine Ruhelage $\dot{x} = f(x)$ und sei die Linearisierung um die RL gegeben durch $\dot{y} = Ay$. Sind die Realteile aller EW kleiner oder gleich null und gibt es ein EW von A , dessen Realteil gleich null ist, so kann ~~man~~ mittels der Linearisierung keine Aussage über die Stabilität der RL gemacht werden.

Beispiel 6:

Betrachte $\dot{x} = -x^3$ und $\dot{x} = x^3$

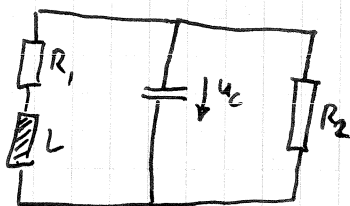


Linearisierung für $\dot{x} = x^3$ an $x^* = 0$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x^*=0} = -3x^2 \Big|_{x=0} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{y} = 0$$

§ 2 Direkte Methode von Lyapunov



Die Netzgleichungen lauten:

$$\frac{d}{dt} i_c = \frac{1}{L} (-u_c - R_1 i_c)$$

$$\frac{d}{dt} u_c = \frac{1}{C} \left(i_c - \frac{u_c}{R_2} \right)$$

EW:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-L - CR_2 \pm \sqrt{(L + CR_2)^2 - 4CLR_2(1 + R_1R_2)}}{2CLR_2}$$

Man kann ausrechnen, dass die Realteile der EW für alle pos. Parameter negativ sind. Also ist die RL asymptotisch stabil.

Betrachtet man die in Schaltkreis gespeicherte

Energie:

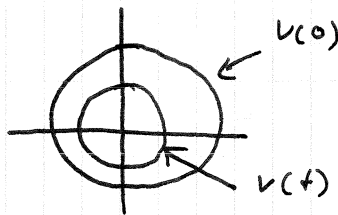
$$V(i_c, u_c) = \frac{1}{2} L i_c^2 + \frac{1}{2} C u_c^2$$

Wie ändert sich V mit der Zeit?

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(i_c(t), u_c(t)) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L i_c(t)^2 + \frac{1}{2} C u_c(t)^2 \right] \\ &= L i_c(t) \cdot \frac{d}{dt} i_c(t) + C u_c(t) \frac{d}{dt} u_c(t) \\ &= i_c(t) (-u_c(t) - R_1 \cdot i_c(t)) + u_c(t) (i_c(t) - \frac{u_c(t)}{R_2}) \\ &= -R_1 (i_c(t))^2 - \frac{1}{R_2} (u_c(t))^2 \\ &= -\frac{R_1}{L} L (i_c(t))^2 - \frac{1}{R_2 C} C (u_c(t))^2 \\ &\leq - \underbrace{\max\left(\frac{R_1}{L}, \frac{1}{R_2 C}\right)}_{=\alpha} (L (i_c(t))^2 + C (u_c(t))^2) \\ &= -2\alpha V(i_c(t), u_c(t)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} V(i_c(t), u_c(t)) \leq -2\alpha V(i_c(t), u_c(t))$$

D.h. $\alpha > 0$ und $V(t) \leq C \cdot e^{-2\alpha t}$ mit $C = \left| \left(\frac{1}{2} L i_c(0), \frac{1}{2} C u_c(0)^T \right) \right|^2$



Definition:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von 0.

Eine Funktion $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt lokal pos. definit, wenn die folgende Bedingungen erfüllt sind:

- 1.) V stetig differenzierbar ($V \in C^1(U, \mathbb{R})$)
- 2.) $V(0) = 0$
- 3.) $V(x) > 0$ für $x \in U \setminus \{0\}$

V heißt lokal positiv definit, wenn statt 3.) gilt:

- 3.) $V(x) \geq 0$ für $x \in U \setminus \{0\}$

Gelten die Bedingungen 1.) bis 3.) (bzw. 1.), 2.), 3)) für $U = \mathbb{R}^n$, heißt ~~lokal positiv definit~~, wenn die folgende Bedingungen erfüllt sind:

~~1.) V stetig differenzierbar ($V \in C^1(U, \mathbb{R})$)~~

~~2.) $V(0) = 0$~~

~~3.) $V(x)$~~

so sprechen wir von positiv definiten (bzw. positiv semidefiniten) Funktionen analog definieren wir negativ definit bzw. negativ semidefinit.

Im Schaltkreis - Beispiel haben wir die Änderung der Energiefunktion entlang von Lösungen unseres Modells untersucht. Das können wir weiter formulieren: Sei $\dot{x} = f(x)$ eine DGL mit $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig diffbare Fkt und $t \mapsto x(t, t_0)$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$ mit AB x_0 .

Es gilt mit der Kettenregel:

$$(*) \quad \frac{d}{dt} V(x(t, t_0)) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{d}{dt} x(t, t_0) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x(t, t_0))$$

Wir definieren die Lie - Ableitung $L_f V: U \rightarrow \mathbb{R}$ von V in Richtung f durch:

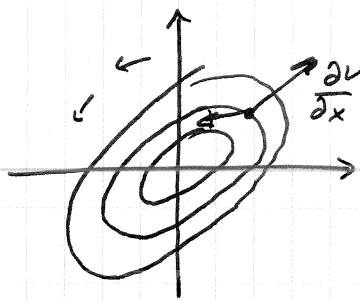
$$L_f V = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f$$

Wegen (*) schreibt man auch oft $\dot{V}$ anstatt $L_f V$.

Satz 9: (Direkte Methode von Lyapunov)

Sei $x^* = 0$ eine RL von $\dot{x} = f(x)$ und U eine offene Umgebung von $x^* = 0$. Gibt es ein lokal positives $V: U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $L_f V$ negativ semidefinit auf U ist, dann ist $x^* = 0$ stabil.

Ist $L_f V$ negativ definit, dann ist $x^* = 0$ asymptotisch stabil.



$$L_f V = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

stumpfer Winkel ($> 90^\circ$): $L_f V < 0$

steiler Winkel ($< 90^\circ$): $L_f V > 0$

Bemerkung 10: Sind die Bedingungen aus Satz 9 für ein V erfüllt, so heißt V Lyapunov-Funktion

Definition 14: Sei x^* eine asymptotisch stabile ~~Funktion~~

RL von $\dot{x} = f(x)$. Dann heißt die Menge $R = \{x_0 \in U \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = x^*\}$

der Einzugsbereich von x^* . Gilt $R = \mathbb{R}^n$, dann heißt x^*

-global asymptotisch stabil.

$\Rightarrow$ Es gibt nur max. 1 global asy. stabile RL

$\Rightarrow$ 1 RL, asy. stabil muss nicht global asymptotisch stabil sein

Definition 13: Sei $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Gilt $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, dann heißt V radial unbeschränkt

Es gilt:

Satz 14: ~~Sei~~ Sei $x^* = 0$ eine RL von $\dot{x} = f(x)$. Existiert ein positiv definites, radial unbeschränktes $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $L_f V$ negativ definit ist, dann ist $x^* = 0$ global asymptotisch stabil.

Definition 15: Eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt positiv invariante Menge von $\dot{x} = f(x)$. Wenn $x_0 \in D$ folgt, dass $x(t, x_0) \in D$ für alle $t \geq 0$.

Bemerkung 16: Eine untere Abschätzung des Einzugsbereichs erhält man, wie folgt: Sei $x^* = 0$ eine RL von $\dot{x} = f(x)$. Sei $D \in U$ eine offene Menge mit $x^* \in D$ auf D ~~der~~ $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ positiv def. ist und $L_f V$ neg. def. ist. Dann gilt jede beschränkte Niveaumenge $H_c = \{x \in D \mid V(x) \leq c\}$ ist eine Abschätzung des Einzugsbereichs.

Lemma 3: (Gronwall)

Sei $g, k: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}, a > 0, k \geq 0$.

$$g(t) \leq c + \int_0^t k(s)g(s)ds \quad \text{für } t \in [0, a]$$

dann gilt: $g(t) \leq ce^{\int_0^t k(s)ds}$ für $t \in [0, a]$

Beweis:

Definiere $G: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $G(t) = c + \int_0^t k(s)g(s)ds$,

also gilt $g(t) \leq G(t)$ für $t \in [0, a]$ und $G(0) = c$

$$\Rightarrow \dot{G}(t) = k(t)g(t) \leq k(t)G(t), \text{ also } \dot{G} - kG \leq 0$$

Multiplikation mit $e^{-\int_0^t k(s)ds}$ ergibt

$$e^{-\int_0^t k(s)ds} (\dot{G} - kG) = \frac{d}{dt} (G(t) e^{-\int_0^t k(s)ds}) \leq 0$$

Integration liefert $G(t) \leq ce^{\int_0^t k(s)ds}$

□

Aus Lemma 3 und (4) folgt

$$\|y\|(t) \leq C \|y_0\| e^{ck(a)\delta t}$$

mit $\xi(t) = e^{\lambda t} \|y(t; y_0)\| \Rightarrow \|y(t; y_0)\| \leq C \|y_0\| e^{(ck(a)\delta - \lambda)t} \leq C \|y_0\| e^{-\alpha t}$

Für $t \in J$. Man kann mittels Fortsetzbarkeit von Lösungen zeigen
 $J = [0, \infty)$.

Somit haben wir plausibilisiert, warum die Ruhelage einer Dgl asymptotisch stabil ist, wenn die EW der Linearisierung einen negativen Realteil haben. Somit bekommen wir:

Satz 4 (indirekte Methode von Lyapunov):

Sei $x^* = 0$ eine RL von $\dot{x} = f(x)$ und sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$.

Setze $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big|_{x=x^*} \right)_{i,j}$. Dann ~~ist~~ gilt:

1. Ist der Realteil aller EW σ_k von A negativ, dann ist die RL $x^* = 0$ asy. stabil.

2. Gibt es einen EW σ_k von A , dessen Realteil positiv ist, dann ist die RL $x^* = 0$ instabil.

Wdh:

$$\dot{x} = f(x)$$

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\mathbb{R}^n$$

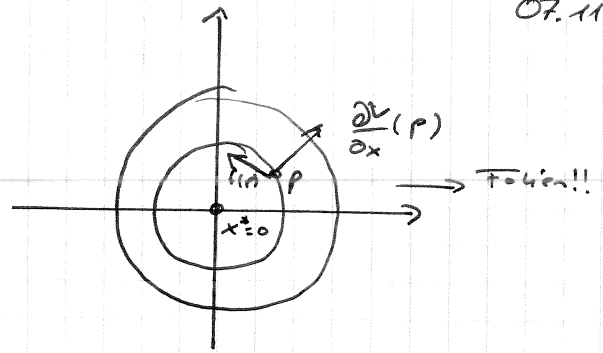
$$V: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$V(0) = 0$$

$$V(x) \geq 0 \quad \text{für } x \in U \setminus \{0\}$$

$$\dot{V} = L_f V(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x) \leq 0 \quad \text{für } x \in U \setminus \{0\}$$

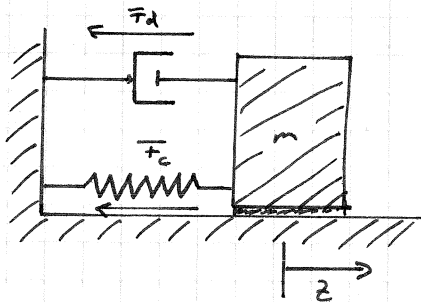
$$L_f V(0) = 0$$



4. Das Invarianzprinzip

Bsp. 16:

Betrachte einen Feder-Masse-Schwinger mit linearer Dämpfungskraft $F_d = d\dot{z}$ mit $d \in \mathbb{R}, d > 0$ und einer nichtlinearen Federkraft $F_c = \psi_F(z)$ mit $k_1 z \leq \psi_F(z) \leq k_2 z$ mit $0 < k_1 < k_2$



$$m \ddot{z} + d \dot{z} + \psi_F(z) = 0$$

$$\text{ZRPD: } \text{sei } v = \dot{z}$$

$$\dot{z} = v$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{m} (\psi_F(z) + d v)$$

Die einzige RL des Systems ist in $(0,0)$.

Wir betrachten die im System gespeicherte potentielle und kinetische Energie V :

$$V(z, v) = \frac{1}{2} m v^2 + \int_0^z \psi_F(\xi) d\xi$$

V ist positiv definit und damit ein geeigneter Kandidat für eine Lyapunovfunktion

$$L_f V(z, v) = m \dot{v} v + \psi_F(z) \dot{z}$$

$$= -\psi_F(z) v dv^2 + \psi_F(z) v$$

$$= -dv^2$$

$$\implies L_F V(z, v) = -d v^2$$

$$f(t) = \int_0^z \psi_F(\xi) d\xi$$

$$\frac{d}{dt} f(t) = \psi(z(t)) \dot{z}(t)$$

D.h.: $L_F V$ neg. semidefinit, also ist die RL $x^* = (0, 0)$ stabil
(i. S. von Lyapunov)

Sei nun $t \mapsto (v(t; (v_0, z_0)), z(t; (v_0, z_0)))$ eine Lsg. des Systems.

Ist $v(t; (v_0, z_0)) \neq 0$ dann gilt $\dot{V}(v(t; (v_0, z_0)), z(t; (v_0, z_0))) = -d(v(t; (v_0, z_0)))^2 < 0$

D.h. solange $v(t; (v_0, z_0)) \neq 0$ ist, nimmt der Wert von $t \mapsto V(v(t; (v_0, z_0)), z(t; (v_0, z_0)))$ ab. Weil aber $t \mapsto V(v(t; (v_0, z_0)), z(t; (v_0, z_0)))$ nicht kleiner als Null werden kann, muss es ein $T > 0$ geben, so dass gilt $v(t; (v_0, z_0)) = 0$ für $t \geq T$.

Was kann passieren? Sei dazu eine Lsg. gegeben mit $v(t; (v_0, z_0)) = 0$ für $t \geq 0$ ($v(t; (v_0, z_0)) \equiv 0$), dann gilt auch $\dot{v}(t; (v_0, z_0)) \equiv 0$.

Dann gilt aber (wegen der DGL) $\psi_F(z(t; (v_0, z_0))) \equiv 0$. Damit folgt $z(t; (v_0, z_0)) \equiv 0$.

Weil zwangsläufig $v(t; (v_0, z_0)) = 0$ für $t \geq T$ gilt. Konvergieren wir gegen $(0, 0) \implies$ RL asymptotisch stabil.

Bemerkung 17

Im Feder-Masse-Beispiel wissen wir, dass alle Lösungen innerhalb einer beschränkten Niveaumenge H von V verlaufen.

Weiterhin konvergiert jede Lösung gegen die Menge $\{x \in H_c \mid L_F V(x) = 0\}$.

Wir wollen ausschließen, dass es eine weitere Lsg. neben der RL gibt, die in der Menge $\{x \in H_c \mid L_F V(x) = 0\}$ verläuft.

Satz 18 (Invarianzprinzip nach ... - LaSalle)

Sei $x^* = 0$ eine RL von $\dot{x} = f(x)$. Sei weiterhin

$V: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lyapunovfunktion mit $L_f V \leq 0$ und

$E = \{x \in U \mid L_f V(x) = 0\}$. Liegt kein Vorwärtorbit in E ,

d.h. gilt für alle $x_0 \in U \setminus \{0\}$, dass

$\{x(t, x_0) \in U \mid t \geq 0\} \cap E = \emptyset$, dann ist $x^* = 0$

asymptotisch stabil.

5. Instabilitätssatz nach ChetaevSatz 19

Sei $x^* = 0$ eine RL von $\dot{x} = f(x)$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$

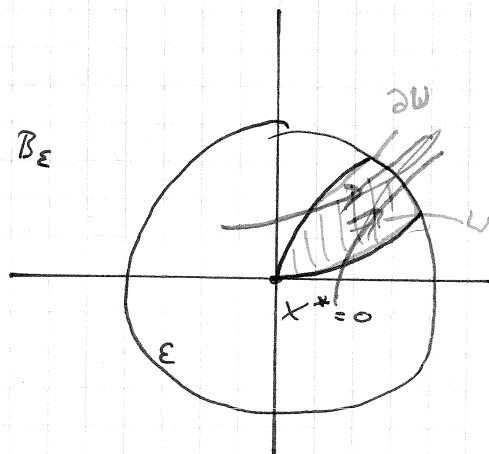
Weiterhin sei $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig diffbare Funktion,

$B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \varepsilon\} \subset U$ und $W \subset B_\varepsilon$ eine offene

Menge, so dass gilt:

- $0 \in \partial W \leftarrow$ Rand von W
- $V(x) = 0$ für $x \in \partial W \cap B_\varepsilon$
- $V(x) > 0$ für $x \in W$
- $L_f V(x) > 0$ für $x \in W$

Dann ist die RL $x^* = 0$ instabil.

Beispiel 20

$$\dot{x}_1 = x_1^3 + x_2^2 x_1$$

$$\dot{x}_2 = -x_2^3 + x_2 x_1^2$$

Die einzige RL ist $(0,0)$. Betrachte

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} x_2^2. \text{ Dann ist}$$

$$W = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid V(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid x_1 > x_2 > -x_1\}$$

Es gilt sich $0 \in \partial W$, und es gibt einen ε -Ball um 0 , $B_\varepsilon(0)$, so dass $W = \bar{W} \cap B_\varepsilon(0)$ die Voraussetzungen aus Satz 19 erfüllt.

Es ist

$$L_f V(x_1, x_2) = x_1^4 - x_2^4$$

D.h.

$L_f V(x_1, x_2) > 0$ wenn $(x_1, x_2) \in W$ liegt. Somit ist die RL $(0,0)$ instabil.

6. Lyapunov Theorie und Lineares Systeme

Wir wollen die Erkenntnisse aus der Lyapunovtheorie auf lineare Systeme anwenden. Sei also im Folgenden eine lineare DGL der Form $\dot{x} = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben.

Def 21 Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($A = A^T$) heißt positiv definit, wenn $x^T A x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.

Gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung $x^T A x \geq 0$, so nennt man A positiv semidefinit.

Sei nun $V(x) = x^T P x$, wobei P eine positiv definite Matrix ist. Angenommen die RL $x^* = 0$ von $\dot{x} = Ax$ ist asymptotisch stabil und V ist eine passende Lyapunovfunktion, dann gilt: $L_f V(x) = L_{Ax} V(x) = x^T (PA + A^T P)x$ ist negativ definit. D.h. es gibt ein positiv definites Q , so dass $x^T (PA + A^T P)x = -x^T Q x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Def 22

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt Hurwitzmatrix, wenn für alle EW λ von A gilt $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$.

Satz 23

Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann eine Hurwitzmatrix, wenn die Gleichung $A^T P + PA + Q = 0$ für jedes positiv definite Q eine eindeutige, positiv definite Lösung P besitzt.

Bemerkung 24

Somit gilt, ist $x^* = 0$ für $\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil, dann gibt es auch eine quadratische Lyapunovfunktion, also ein positiv definites $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so dass $V(x) = x^T P x$ ist.

A1)

a) Modellierung

Kondensator ~~ist~~ $u = c \dot{x}$

Spule: $\dot{x} = L \cdot \dot{u}$

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

$$\dot{u} = \frac{x}{L}$$

$$\frac{1}{L} \int_0^t x dt$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}$$

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

$$x_1 x_2$$

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

$$u = c \dot{x} + \frac{R(x)}{L} + \frac{x}{L} t$$

$$u = c \dot{x} + \frac{x}{-1 + \frac{1}{3} x^2} + \frac{x}{L} t$$

$$\int_0^t \frac{x}{L} dt$$

$$\frac{x}{L} [t]_0^t$$

$$u = c \dot{x} + \frac{1}{-1 + \frac{1}{3} x^2} + \frac{x}{L} t$$

$$-u + \frac{1}{3} x^2 u = c \dot{x} (-1 + \frac{1}{3} x^2) + 1 + \frac{x}{L} t (-1 + \frac{1}{3} x^2)$$

$$= \frac{1}{3} c x^2 \dot{x} - c \dot{x} + 1 + \frac{x}{L} t \frac{1}{3} x^2 - \frac{x}{L} t$$

$$-u + \frac{1}{3} x^2 u = \frac{1}{3} c x^2 \dot{x} - c \dot{x} + 1 + \frac{x}{L} t \frac{1}{3} x^2 - \frac{x}{L} t$$

$$-u + \frac{2}{3} x \dot{x} u + \frac{1}{3} x^2 \dot{u} = \frac{2}{3} c x^2 \dot{x} + \frac{1}{3} c x^2 \ddot{x} - c \ddot{x} + \frac{2}{L} x^2 \dot{x} + \frac{1}{3} x^3 - \frac{x}{L} t - \frac{x}{L}$$

$$u = c \dot{x} + \frac{1}{3} x^3 - x + \frac{x}{L} t$$

$$u = c \dot{x} + \frac{1}{3} x^3 - x + \frac{x}{L} \sqrt{cL} \tau$$

$$u = c \dot{x} \sqrt{cL} + \frac{1}{3} x^3 - x + \frac{x}{L} \sqrt{cL} \tau$$

$$\dot{u} = c \sqrt{cL} \ddot{x} + x^2 \dot{x} - \dot{x} + \frac{x}{L} \sqrt{cL} \tau + \frac{x}{L} \sqrt{cL}$$

$$\dot{u} = c \sqrt{cL} \ddot{x} + x^2 \dot{x} - \dot{x} + \left(\frac{x}{L} \sqrt{cL} \tau \right) + x \sqrt{\frac{c}{L}}$$

$$\dot{u} = \ddot{x} - (1 - x^2) \dot{x} + \frac{1}{\mu} x$$

$$\mu \dot{u} = \mu c \sqrt{cL} \ddot{x} - (1 - x^2) \dot{x} + x$$

$$\ddot{x} = \frac{dx}{dt^2}$$

$$\frac{dx}{d\tau \sqrt{cL}} = \dot{x}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \dot{x} \sqrt{cL}$$

$$c \sqrt{cL} \ddot{x}$$

$$\dot{x} \frac{1}{\sqrt{cL}}$$

b) $x_1 = x$

$x_2 = \dot{x}$

~~$x_3 = \ddot{x}$~~

$$\ddot{x} - \mu \dot{x} - \dot{x} x^2 + x = \mu \dot{u}$$

$$\ddot{x} - \mu x_2 + x_2 x_1^2 + x_1 = \mu \dot{u}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \mu \dot{u}$$

$$x_1 = x_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{u}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 0 & \hat{A} \\ \hat{A}^T & \hat{A} \end{bmatrix}$$

~~R=1~~
~~R=0~~

$$\begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix}$$

e)

$$\begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & \mu^2 \end{bmatrix}$$

~~R=0~~
~~R=0~~ $\mu \neq 0$

$$\begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix}$$

f)

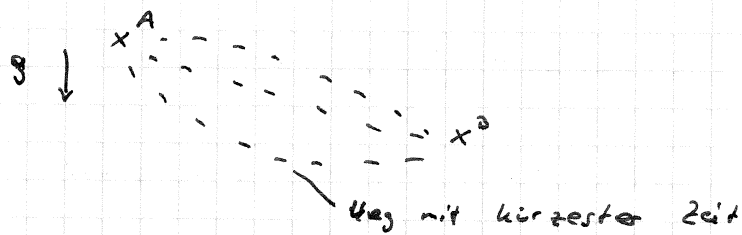
g)

1. Einleitung

1637 Johann Bernoulli (Vergleich, Hurwitz * 1859, Lyapunov * 1857)

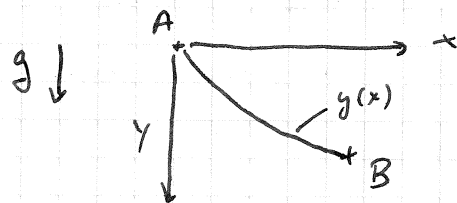
Alt Brachistochrone - Problem

"Wenn in einer vertikalen Ebene zwei Punkte A und B gegeben sind, soll man dem beweglichen Punkte A eine Bahn AMB anweisen, auf welcher er von A ausgehend vermöge seiner eigenen Schwere in kürzester Zeit nach B gelangt."

1.2 Mathematische Formulierung

Zeit, die ein Punkt in einem Schwerfeld braucht, um von einem Punkt A zu einem Punkt B zu 'rollen' ist gegeben als:

$$T_{A \rightarrow B} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{y(x)}} dx, \text{ wobei } y \text{ die Kurve beschreibt}$$



gesucht wird y

Was wir suchen ist eine Funktion, die $T_{A \rightarrow B}$ minimiert

$$y^*(x) = \arg \min_y T_{A \rightarrow B}(y)$$

mit den Bed.

$$y(x_A) = y_A$$

$$y(x_B) = y_B$$

1.3 Optimalsteuerungsprobleme

• Wir führen eine Steuerungsgröße ein; setze $u := y'(x)$

• Definiere $\tilde{f}_0(x, y(x), u) := \sqrt{\frac{1+u^2}{y(x)}}$

$$\min_{y} \int_{x_A}^{x_B} \tilde{f}_0(x, y(x), u) dx$$

mit den Bedingungen $y'(x) = u$, $y(x_A) = y_A$, $y(x_B) = y_B$

Def. 1:

Ein Optimalsteuerungsproblem ist ein Optimierungsproblem der Form

$$J^*(x_0, t_0, t_f) = \min_u \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt + \Phi(t_f, x(t_f))$$

so dass $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \leftarrow \text{dynamik}$

$$x(t_0) = x_0 \in \mathcal{X}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$x(t_f) \in \mathcal{X}_f \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$u(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m, t \in [t_0, t_f]$$

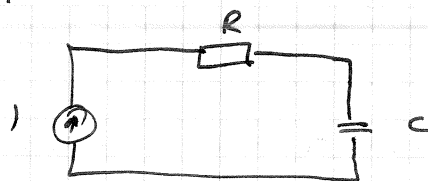
$$x(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$$

- $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ Dynamik (dynamics)
- J^* : optimale Kosten (cost function)
- x^* optimale Lösung, u^* optimaler Eingang
- f_0 Zustandskosten (state cost, running payoff)
- Φ Endkosten (terminal cost)
- t_f Optimierungshorizont (optimization horizon)
- x_0 Anfangsbedingungen (initial condition)
- $\mathcal{X}_f$ Endregion (Terminal set)
- $\mathcal{X}$ Zustandsbeschränkungen (state constraints)
- $\mathcal{U}$ Eingangsbeschränkungen (input constraints)

$$\text{Bsp.: } \mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^m : -1 \leq u \leq 1\}$$

2. Linear-Quadratische Optimalsteuerungsprobleme

2.1 Bsp.



Aufgabe: Finde Strom i so, dass Energieverlust im Widerstand R minimal wird.

- Kondensator Gleichung:

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{C} i(t)$$

- Energie im Widerstand:

$$\int_0^{t_f} R i^2(t) dt$$

Optimalsteuerungsaufgabe:

Definiere: $u(t) := i(t)$ (Strom)

$x(t) := v(t)$ (Spannung)

$$J^*(x_0, 0, t_f) = \min_u \int_0^{t_f} \underbrace{R u^2(t) dt}_{\text{Quadratisch}}$$

s.d. $\dot{x}(t) = \frac{1}{C} u(t)$ Linear

$$x(0) = x_0$$

$$x(t_f) = x_f \in \mathbb{R}$$

$$u(t) \in \mathbb{R}, t \in [0, t_f]$$

2.2 Definitionen

2.2.1 Def.: $\mathbb{R}$

Ein Linear-Quadratisches Optimalsteuerungsproblem mit endlichem Zeithorizont ist ein Optimalsteuerungsproblem der Form:

$$J^*(x_0, 0, t_f) = \min \int_0^{t_f} x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) dt$$

s.d.

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu$$

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m, t \in [0, t_f]$$

$$+ x^T(t_f) S x(t_f)$$

Wobei $Q, S, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. ~~Ferner~~ ^{Ferner}

$Q = C^T C$ positiv semi-definit, S positiv semi-definit,

R positiv definit

15.11.13

$$\min_u \int_0^{t_f} y^T(t) y(t) + u^T(t) R u(t) dt$$

s.t. $\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$

$$y(t) = C x(t)$$

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$u(t) \in \mathbb{R}^m$$

Satz Betrachtet wird ein Linear-Quadratisches
Optimalsteuerungsproblem mit endlichem Horizont. Es
existiert eine eindeutige Lösung zu dem Problem mit

- optimalen Kosten $J^*(x_0, 0, t_f) = x_0^T P^*(0) x_0$
- optimalem Eingang $u^*(t) = -R^{-1} B^T P^*(t) x(t)$
- optimale Lösung (DEL) erfüllt $\dot{x}^* = (A - B R^{-1} B^T P^*(t)) x^*$

Wobei P^* die Lösung der Matrix-Differentialgleichung

$$\dot{P}^* = P^* A + A^T P^* - P^* B R^{-1} B^T P^* + Q$$

$$P^*(t_f) = S$$

ist.

Matrix-Differentialgleichung ist ein Differentialgleichungssystem
in jeder Komponente des Zustandes (Matrix)

$$\dot{P} = \begin{bmatrix} \dot{P}_1(t) & \dot{P}_2(t) \\ \dot{P}_2(t) & \dot{P}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(p_1, p_2, p_3) & f_2(p_1, p_2, p_3) \\ f_2(p_1, p_2, p_3) & f_3(p_1, p_2, p_3) \end{bmatrix} = f(P)$$

Optimaler Eingang als Feedback:

$$u^*(t, x) = -K(t)x, \quad K(t) = R^{-1}B^T P^*(t)$$

"Wenn $\dot{P}^* = 0$ (Ruhelage von der Riccati-Gleichung) ist ~~ist~~

$K = \text{const.}$ "

2.2.2 Unendlicher Zeithorizont

Def.: 3 Ein linear-quadratisches Optimalsteuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont (LQR-Problem) ist ein optimalsteuerungsproblem der Form:

$$J^*(x_0, 0) = \min_u \int_0^\infty x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) dt$$

$$\text{s.d.} \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, t \in [0, \infty)$$

Wobei $Q = C^T C$ pos. semi-def., R pos. definit

Bsp.:

$$\min_u \int_0^\infty x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t) dt$$

$$\text{s.d.} \quad \dot{x}_1(t) = x_1(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} \neq 0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}$$

Satz 2: Betrachtet wird ein LQR-Problem (unendlicher Zeithorizont). Wenn (A, B) steuerbar ~~ist~~ und (A, C) beobachtbar sind, dann existiert eine eindeutige, positiv definite Lösung P^* der Matrixgleichung

$$P^*A + A^T P^* - P^*B R^{-1} B^T P^* + Q = 0 \quad (\text{ARE})$$

so dass

$$\bullet \quad J^*(x_0, 0) = x_0^T P^* x_0 \quad \text{und}$$

$$\bullet \quad (A - B R^{-1} B^T P^*) \text{ Hurwitz ist.}$$

Ferner erfüllt dann die optimale Lösung $\dot{x}^* = \underline{(A - BR^{-1}B^TP^*)x^*}$,
 mit $AB \quad x^*(0) = x_0$ und der optimale Eingang ist
 $u^*(t) = -R^{-1}B^TP^*x^*(t)$

Bemerkung:

- Sei P ein Lösung einer ARE, dann heißt ein Feedback der Form ~~$u(x) = -R^{-1}B^TPx$~~ $u(x) = -R^{-1}B^TPx$ LQR-Regler.
- Wenn $x_0^T P x_0 = J^*(x_0, 0)$ für ein gegebenes LQR-Problem, ist $u(x) = -R^{-1}B^TPx$ der optimale ~~LQR~~ - LQ-Regler
- Wenn $A - BR^{-1}B^TP$ Hurwitz ist, ist $u(x) = -R^{-1}B^TPx$ der stabilisierende LQ-Regler

Bsp.:

$$J^*(x_0, 0) = \min \int_0^\infty x^2(t) + u^2(t) dt$$

$$\text{s.d. } \dot{x}(t) = x(t) + u(t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$u(t) \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty)$$

$$Q, R, A, B = 1$$

$$\text{ARE: } P^*A + A^TP^* - P^*BR^{-1}B^TP^* + Q = 0$$

$$P \cdot 1 + 1 \cdot P - P \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot P + 1 = 0$$

$$2P - P^2 + 1 = 0$$

Lsgen:

$$P_1^* = 1 + \sqrt{2} = P^*$$

$$P_2^* = 1 - \sqrt{2}$$

$$\dot{x}^*(t) = (1 - 1 - \sqrt{2})\dot{x}(t)$$

$$u^*(t) = -(1 + \sqrt{2})\dot{x}(t)$$

Satz: LQR - Problem (unendlicher Horizont)

(A, B) steuerbar, (A, C) beobachtbar

$\Rightarrow$ eindeutige pos. def. Lsg. der ARE

$$P^* A + A^T P^* - P^* B R^{-1} B^T P^* + Q = 0$$

existiert, so dass

$$1) J^*(x_0, 0) = x_0^T P^* x_0$$

$$2) A - B R^{-1} B^T P^* \text{ Hurwitz} \quad \text{ist} \quad \dot{x}^* = (A - B R^{-1} B^T P^*) x^*,$$

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T P^* x^*(t)$$

$$\rightarrow \text{LQR - Regler: } u(t) = -R^{-1} B^T P^* x$$

Bsp.: Betrachte LQR - Problem mit Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1 \rightarrow \text{Doppelintegrator}$$

(A, B) steuerbar, denn

$$\text{Rang}(B \mid AB) = \text{Rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 = n$$

$$(A, C) \text{ beobachtbar mit } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C^T C = Q$$

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} C \\ C A \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 = n$$

Löse ARE:

$$\text{Ansatz: } P^* = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A^T} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B \cdot \underbrace{1}_{R^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B^T} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \dots \\ & \dots + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_Q = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & p_1 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & p_1 \\ p_1 & 2p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & p_2 \\ 0 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & p_1 \\ p_1 & 2p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1^2 & p_2 p_3 \\ p_3 p_2 & p_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$1. \quad -p_2^2 + 1 = 0 \Rightarrow p_{2,1} = 1, p_{2,2} = -1$$

$$2. \quad p_1 - p_2 p_3 = 0$$

$$3. \quad 2p_2 - p_3^2 + 1 = 0$$

$$3.1 \quad , p_{2,1} = 1$$

$$-p_3^2 + 3 = 0 \Rightarrow p_{3,1} = \sqrt{3}, p_{3,2} = -\sqrt{3}$$

$$3.2 \quad , p_{2,2} = -1$$

$$-p_3^2 = 1 \quad \hookrightarrow \text{keine reelle Lsg (nicht von Interesse)}$$

$$2.1 \quad , p_{2,1} = 1, p_{3,1} = \sqrt{3}$$

$$p_1 = p_3 \Rightarrow p_{1,1} = \sqrt{3}$$

$$2.2 \quad , p_{2,2} = 1, p_{3,2} = -\sqrt{3}$$

$$p_1 = p_3 \Rightarrow p_{1,2} = -\sqrt{3}$$

2 Kandidaten:

$$P_1^* = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P_2^* = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \hookrightarrow \text{da nicht pos. def. da 1. Hauptminor} < 0$$

$$A - BR^{-1}B^T P^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}, \text{ HA: Hurwitz?}$$

Stabilität mit $P^* > 0$

Annahme (A, B) steuerbar, (A, C) beobachtbar $\Rightarrow$ es ex. ein eindeutiger $P^* > 0$

Idee Verwende $x^T P x$ als Lyapunov-Fkt. Kandidat für $\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T P)x$

$$V = x^T P x$$

$$\begin{aligned} L_{(A - BR^{-1}B^T P)x} V(x) &= 2x^T P \dot{x} \\ &= 2x^T P^* (A - BR^{-1}B^T P^*)x \\ &= 2x^T P^* A x - 2x^T (P^* B R^{-1} B^T P^*)x \\ &= x^T (P^* A + A^T P^*)x - 2x^T (P^* B R^{-1} B^T P^*)x \end{aligned}$$

$$P^* A + A^T P^* = -Q + P^* B R^{-1} B^T P^* \xrightarrow{(ARE)} = -x^T Q x - x^T P^* B R^{-1} B^T P^* x \leq 0$$

$\Rightarrow$ Ursprung ist stabil

$\Rightarrow V(x) = x^T P x$ ist Lyapunov-Fkt.

Asympt. Stabilität: Verwende Krasovskii-Ledalle

größte invariante Menge in $\{x \in \mathbb{R}^n, L_{(A - BR^{-1}B^T P^*)x} V(x) = 0\}$

$$\Rightarrow 1. \quad x^T Q x = 0$$

$$2. \quad x^T P^* B R^{-1} B^T P^* x = 0 \rightarrow u^T R u = x^T P^* B R^{-1} R R^{-1} B^T P^* x = 0$$

$\Rightarrow u = 0$, weil R pos. def. ist

$$\text{aus 1., setze } y = Cx, \quad y^T y = 0 \Leftrightarrow x^T Q x = x^T C^T C x = 0$$

$$\text{daher } y = 0, \dot{y} = 0, \ddot{y} = 0, \dots \Rightarrow y = 0 \Rightarrow Cx = 0$$

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow C\dot{x} = 0 \Rightarrow C(Ax + Bu) = 0$$

$$\Rightarrow CAx = 0$$

$$\ddot{y} = 0 \Rightarrow C\ddot{x} = 0 \Rightarrow CA^2 x = 0, \quad CA^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \end{bmatrix} x = 0$$

$\rightarrow$ Beobachtbarkeitsmatrix. Weil (A, C) beobachtbar, hat diese vollen Rang

$\Rightarrow$ größte invariante Menge in $\{x \in \mathbb{R}^n\} \dots$

$$\dots \mathcal{L}(A - BR^{-1}B^T P^*)x \quad V(x) = 0$$

ist der Ursprung (global) asympt. stabil

Herleitung von u^* :

Betrachte:
$$x_0^T P^* x_0 = \int_0^\infty x^{*T} Q x^* + u^{*T} R u^* dt$$

1. Wir addieren und subtrahieren $0 = \int_0^\infty x^{*T} (P^* A + A^T P^* - P^* B R^{-1} B^T P^* + Q) x^* dt$

somit sowie

$$0 = \int_0^\infty u^{*T} B^T P^* x^* - u^{*T} B^T P^* x^* + x^{*T} P^* B u^* - x^{*T} P^* B u^* dt = 0$$

2.
$$x_0^T P^* x_0 = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u - x^T (P^* A + A^T P^* - P^* B R^{-1} B^T P^* + Q) x - u^T B^T P^* x + u^T B^T P^* x \dots$$

$$\dots - x^T P^* B u + x^T P^* B u dt \quad \begin{matrix} x \rightarrow x^* \\ u \rightarrow u^* \end{matrix}$$

3. Nach Umschreiben

$$x_0^T P^* x_0 = \int_0^\infty u^T R u - x^T P^* (A x + B u) - (A x + B u)^T P^* x + x^T P^* B R^{-1} B^T P^* x + u^T B^T P^* x + x^T P^* B u dt$$

4. Ersetze $Ax + Bu = x$

$$x_0^T P^* x_0 = \int_0^\infty u^T R u - x^T P^* x - x^T P^* x + x^T P^* B R^{-1} B^T P^* x + u^T B^T P^* x + x^T P^* B u dt$$

5.
$$\int_0^\infty \dot{x}^T P^* x + x^T P^* \dot{x} dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt} (x^T P^* x) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} x^T(t) P^* x(t) - x_0^T P^* x_0$$

$$\Rightarrow \text{Wert } 0 \text{ für } x \text{ as. stabil}$$

$$\Rightarrow x_0^T P^* x_0 = x_0^T P^* x_0 + \int_0^\infty u^T R u + x^T P^* B R^{-1} B^T P^* x + u^T B^T P^* x + x^T P^* B u dt$$

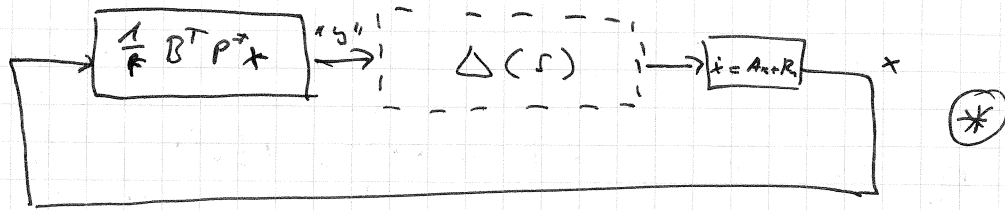
$$\Rightarrow 0 = \int_0^\infty (u + R^{-1} B^T P^* x)^T R (u + R^{-1} B^T P^* x) dt$$

Wenn $u = -R^{-1} B^T P^* x$ ist, verschwindet das Integral

$\rightarrow$ "Completion of squares"

Quadratische Ergänzung

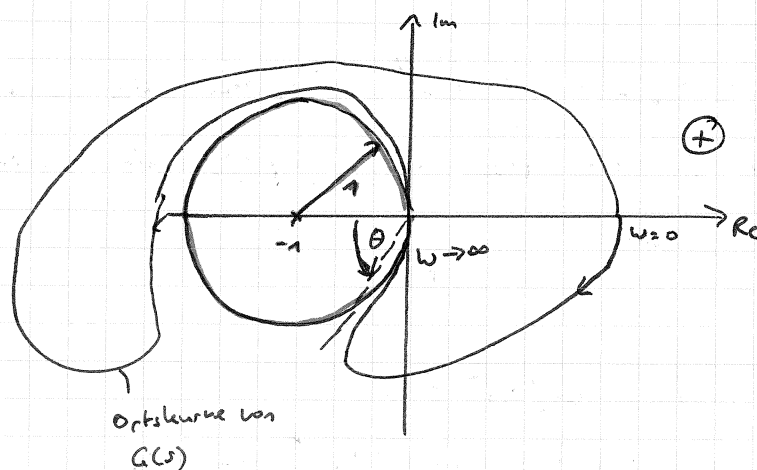
Robustheit des LQR-Reglers

Gegeben $\dot{x} = Ax + Bu$ LQR-Regler mit $Q, R = r \in \mathbb{R}$ LQR-Regler : $u(x) = -\frac{1}{r} B^T P^* x$

Frage: Welche Eigenschaften darf $\Delta(s)$ haben, damit der geschlossene Kreis immer noch asymp. stabil ist?

$$G(s) = \underbrace{-\frac{1}{r} B^T P^* (sI - A)^{-1} B}_{C} \quad (\text{FRD}) \quad y = -\frac{1}{r} B^T P^* x$$

Wir zeigen: Die Ortskurve des offenen Kreises ist für alle $\omega \geq 0$, für pos. semidef. Q außerhalb eines Kreises mit Mittelpunkt $(-1 + 0j)$ und Radius 1

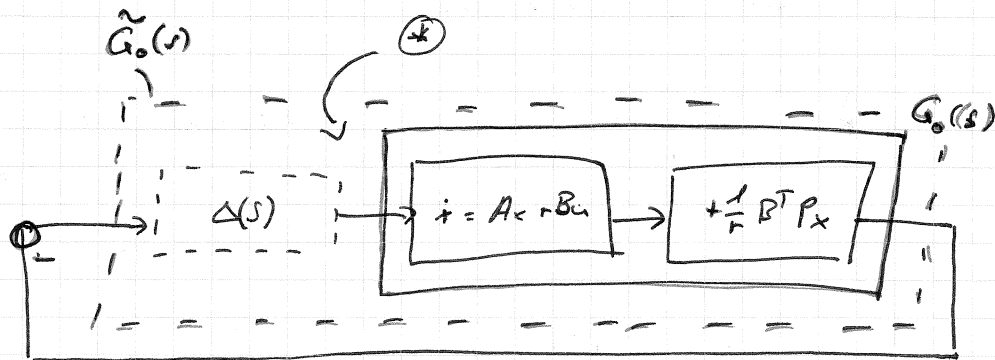


$\Rightarrow \Delta(s)$ darf den Reglerausgang ~~um~~ um den Faktor $\frac{1}{2} \leq k < \infty$ verstärken, sie darf die Phase um den Wert $-60^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ verändern

Robustness margins des LQR-Reglers

Robustheit: SISO-System: $\dot{x} = Ax + Bu$, $u(t) \in \mathbb{R}$

geg.: $Q = C^T C \geq 0$, $R = r \in \mathbb{R}$



("Nyquistkriterium")

$$G_o(s) = \underbrace{+\frac{1}{r} B^T P}_{C^T} (sI - A)^{-1} B$$

Wenn 1. $\Delta(s) = 1$

2. (A, C) beobachtbar

3. (A, B) steuerbar

4. $P > 0$ erfüllt, dann ist der geschlossene Kreis stabil.

$$G_o(s) \rightsquigarrow \Delta(s) G_o(s) = \tilde{G}_o(s)$$

Zu zeigen:

Für $G_o(s) = -\frac{1}{r} B^T P (sI - A)^{-1} B$ gilt, dass die Ortskurve von $G_o(s)$ nicht in den Kreis von $(-1 + j0)$ mit Radius 1 eintaucht.

Bild

(+)

Zu zeigen: $|1 + G_o(j\omega)|^2 \geq 1$

Rechnung: $|1 + G_o(j\omega)|^2 = (1 + G_o(j\omega))^* (1 + G_o(j\omega))$

$$= 1 + G_o(-j\omega)^T + G_o(j\omega) + G_o(-j\omega)^T G_o(j\omega)$$

$$= 1 + \frac{1}{r} B^T (-j\omega I - A)^T P B + \frac{1}{r} B^T P (j\omega I - A)^{-1} B \dots$$

$$\dots + \frac{1}{r^2} B^T (-j\omega I - A)^T P B B^T P (j\omega I - A)^{-1} B$$

$$= 1 + \frac{1}{r} B^T (-j\omega I - A)^T \left[P (j\omega I - A) + (-j\omega I - A)^T P \dots \right.$$

$$\left. \dots + \frac{1}{r} P B B^T P \right] (j\omega I - A)^{-1} B$$

...

NR:

$$\frac{1}{F} B^T P (j\omega I - A)^{-1} B$$

$$= \frac{1}{F} B^T (-j\omega I - A)^{-T} [(-j\omega I - A)^T P (j\omega I - A)^{-1} B]$$

$$= 1 + \frac{1}{F} B^T (-j\omega I - A)^{-T} \underbrace{[-PA - A^T P + \frac{1}{F} P B B^T P]}_{= Q \text{ (ARE)}} (j\omega I - A)^{-1} B$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{1}{F} B^T (-j\omega I - A)^{-T} Q (j\omega I - A)^{-1} B}_{\geq 0 \text{ (da quadratisch)}} \geq 1$$

- Was gezeigt wurde:

~~Der offene Kreis~~ Amplitudenreserve (gain margin) : $(\frac{1}{2}, \infty)$

Phasenreserve (phase margin) : $-60^\circ \leq \vartheta \leq 60^\circ$

Exkurs in die Stabilisierbarkeit und Entdeckbarkeit

Bsp.: $\dot{x} = Ax + Bu$

Finde $u(x) = -Kx$, so dass $(A - BK)$ asymptotisch stabil

$$\dot{x}_1 = x_1 + u$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 \rightarrow \text{Stabilisierbarkeit}$$

2. Zustand ist stabil

Def. 4:

Ein lineares, zeitinvariantes System heißt steuerbar, wenn

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} B \\ AB \\ \vdots \\ A^{n-1}B \end{pmatrix} = n$$

wobei n die Systemordnung ist

Def. 5: Das Paar (A, B) heißt stabilisierbar, wenn

$$\text{Rang}(\lambda I - A \mid B) = n \quad \forall \lambda(A): \text{Re}(\lambda(A)) \geq 0 \quad (\text{Hurwitz-Test})$$

„Stabilisierbarkeit heißt, dass nur die instabilen Pole gesteuert werden können.“

Satz: Das Paar (A, B) ist stabilisierbar, genau dann wenn ein $k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existiert, so dass $(A - Bk)$ Hurwitz ist.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

EW von A sind: $\{-2, 4\}$, stabilisierbarkeit muss nur für $\lambda = 4$

überprüft werden d.h.

$$\text{Rang} \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - A \mid \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = n$$

↳ stabilisierbar

Satz: wenn (A, B) steuerbar, dann (A, B) stabilisierbar

Def.: 6 Das Paar (A, C) heißt ~~entdeckbar~~ beobachtbar, wenn

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n, \quad \forall \lambda(A): \text{Re}(\lambda(A)) \geq 0$$

Bsp.:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Def.: 7 Das Paar (A, C) heißt entdeckbar, wenn

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix} = n, \quad \forall \lambda(A): \text{Re}(\lambda(A)) \geq 0$$

Bsp.:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 & -3 \end{bmatrix}$$

EW von A $\{-2, 4\}$ wg. Dreieckstruktur

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 6 & -3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \text{Rang} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = 1 < n$$

↳ nicht entdeckbar

Satz: Das Paar (A, C) ist entdeckbar, genau dann, wenn ein $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass $(A - LC)$ Hurwitz ist

Satz: Das Paar (A, C) beobachtbar, dann ist (A, C) auch entdeckbar

Def: Das duale System, zu einem linearem, zeitinvarianten System ist ~~es~~ gegeben durch

$$\dot{x}' = A^T x' + C^T u'$$

$$y' = B^T x'$$

Bem.: Eine Zustandsrückführung $u(x) = -kx$, die ~~das~~ ^{das} originale System stabilisiert, kann als stabilisierende Beobachtermatrix ($L = k^T$) für das duale System dienen.



2.2.4 Weitere Ergebnisse

Satz 9: Betrachtet wird ein LQR Linear-quadratisches Optimalsteuerungsproblem mit unendlichem Horizont. Sei (A, B) stabilisierbar. Dann existiert (mindestens) eine positiv semi-definite Lösung P der Matrixgleichung

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0.$$

Dann existiert eine positiv semi-definite Lsg. P^* , so dass

- $J^*(x_0, 0) = x_0^T P^* x_0$
- $\underbrace{(A - BR^{-1}B^T P^*)}_{\text{closed loop}}$ ist Hurwitz genau dann wenn (A, C) entdeckbar ist. Die optimale Lsg. erfüllt dann $\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T P^*)x$ mit $x^*(0) = x_0$ und der optimale Eingang ist $u^*(t) = -R^{-1}B^T P^* x^*(t)$

Bem.:

- Es existiert immer nur max. eine pos. semi-def. Lösung der ARE, für die $(A - BR^{-1}B^T P)$ Hurwitz ist.
- Im Allgemeinen kann es mehrere Lösungen der ARE geben!
- Man kann zeigen, dass die größte aller pos. semi-definiten Lsg. diejenige ist, für die $(A - BR^{-1}B^T P)$ Hurwitz ist.

(sofern eine stabilisierende Lsg. existiert)

P_1, P_2 Lsg. der ARE sind $P_1 \geq P_2$ $\Leftrightarrow P_1 - P_2$ ist pos. semi-def.
--

Satz 10: Es existiert eine pos. definite Lösung P_s der ARE

$$P_s A + A^T P_s - P_s B R^{-1} B^T P_s + Q = 0$$

so dass $(A - B R^{-1} B^T P_s)$ Hurwitz ist, genau dann wenn (A, B) stabilisierbar ist und $(-A, C)$ entdeckbar ist.

(stabilisierender Regler)

Im Allgemeinen immer stab. von $(A - B R^{-1} B^T P)$ überprüfen!

Bsp.:

(Doppelint.) $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \ 1]$

Wähle $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1$

EW von A sind $[0, 0]$, (A, B) stabilisierbar (steuerbar)

$$\text{Rang}(B \ A B) = \text{Rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \checkmark$$

(A, C) ist nicht entdeckbar

Ansatz:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & p_1 \\ p_2 & 2p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_3 & p_2 p_3 \\ p_2 p_3 & p_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$-p_2^2 = 0 \Rightarrow p_2 = 0$$

$$p_1 - p_2 p_3 = 0 \Rightarrow p_1 = 0$$

$$p_3^2 = 1 \Rightarrow p_{3,1} = 1, p_{3,2} = -1$$

gerchl. Kreis

$$A - BB^T P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$EW: \{0, -1\}$$

„Hat keine stabilisierende Lösung, obwohl steuerbar“

3. Kalman - Bucy - Filter

Problemstellung des KBF:

Gegeben:

$$\dot{x} = Ax + \tilde{B}u$$

$$y = Cx$$

Finde Beobachtermatrix L für den Beobachter $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - L(C\hat{x} - y)$, $\hat{x}(t_1) = \hat{x}_0$

so dass das Kostenfunktional

$$\int_{t_1}^0 (x - \hat{x})^T Q (x - \hat{x}) + (y - C\hat{x})^T R (y - C\hat{x}) dt$$

mit $Q = Q^T = BB^T$ pos. semidef. und R pos. def. minimiert wird.

Hier (in der KRT) stationäre KBF

Finde Beobachtermatrix L für

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x})$$

so dass

$$\int_{-\infty}^0 (x - \hat{x})^T Q (x - \hat{x}) + (y - C\hat{x})^T R (y - C\hat{x}) dt$$

Idee des KBF:

Setze zunächst $\dot{\hat{x}} = A\hat{x}$, definiere: $e = x - \hat{x}$

$$\tilde{y} = C\hat{x} - y \quad \text{so dass}$$

$$\dot{e} = Ae$$

$$\tilde{y} = Ce$$

Formuliere LQR-Problem, um das duale Fehlersystem in Rückwärtszeit asymp. zu stabilisieren. Sei e' der Zustand des dualen Systems.

$$\min_{\tilde{y}} \int_{-\infty}^0 e'^T Q e' + \tilde{y}^T R \tilde{y} dt$$

s. d. $\dot{e}' = -A^T e' - C^T \tilde{y}$

$e(0) = e_0$

• Führe Zeitvariable $\tilde{t} = -t$, $d\tilde{t} = -dt$

$$\min_{\tilde{y}} \int_0^{\infty} e'^T Q e' + \tilde{y}^T R \tilde{y} d\tilde{t}$$

s. d. $\frac{de'(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \frac{de'(-t)}{dt} \underbrace{\frac{dt}{d\tilde{t}}}_{-1} = -A^T e' - C^T \tilde{y}$

$e(0) = e_0$

$$\min_{\tilde{y}} \int_0^{\infty} e'^T Q e' + \tilde{y}^T R \tilde{y} d\tilde{t}$$

s. d. $\frac{de'(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = A^T e' + C^T \tilde{y}, e(0) = e_0$

LQR-Problem

ARE :

$$P^* A^T + A P^* - P^* C^T R^{-1} C P^* + Q = 0$$

optimaler virtueller Eingang

$$\tilde{y}(\tilde{t}) = \underbrace{-R^{-1} C P^* e^*(\tilde{t})}_{= -\tilde{k} = -L^T}$$

~~Einsetzen~~ Für originales System gilt:

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

$$\Leftrightarrow \dot{\hat{x}} - \dot{x} = (A - LC)(\hat{x} - x)$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} - LCx$$

$$\boxed{\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - LC(\hat{x} - x) = A\hat{x} - \underbrace{P^* C^T R^{-1} (C\hat{x} - y)}_{LBF}}$$

Satz: Gegeben

$$\dot{x} = Ax \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$y = Cx$$

mit $y(t) \in \mathbb{R}^m$. Außerdem sind die Matrizen $Q = BB^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pos. semi-def. sowie $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ pos. def. gegeben. Sei (A, C) entdeckbar und (A, B) stabilisierbar, dann existiert eine eindeutige pos. semi-def. Matrix P^* , so dass

$$P^* A^T + A P^* - P^* C^T R^{-1} C P^* + Q = 0$$

unterschiede zum normalen ARE

Ferner ist das System

$$\dot{e} = (A - P^* C^T R^{-1} C) e, \quad e(0) = e_0$$

global asymptotisch stabil, wobei

$$e = x - \hat{x} \quad \text{mit}$$

$$\hat{x} = A \hat{x} - P^* C^T R^{-1} (C \hat{x} - y), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{ist.}$$

"KBF"

Bem:

Der KBF spielt eine große Rolle in stochastischen Systemen der Form

$$\dot{x} = Ax + w \quad w \dots \text{Prozessrauschen}$$

$$y = Cx + v \quad v \dots \text{Messrauschen}$$

$w, v \dots$ Erwartungswerte verschwinden: $E[w(t)w(\tau)^T] = Q\delta(t-\tau)$

$$E[v(t)v(\tau)^T] = R\delta(t-\tau)$$

- Die Kombination von LQR-Regler mit KBF nennt man auch LQG-Control ("Linear-Quadratic Gaussian")
- LQG hat keine ~~garantierten~~ garantierten Robustheitseigenschaften.
- Aufgrund des Separationsprinzips ist LQG asymptotisch stabil.

III. Einführung in die Robuste Regelung

→ Lineare SISO-Systeme

robust: $\leadsto$ Robustheit einer Eigenschaft bzgl. Unsicherheitsklasse

Ab hier sind die Unterlagen im ILLAS zu finden

- Pole verschiebt man durch ein Feedback
- Nullstellen fügt man durch ein Feedforward ein